Nierozwiązane problemy w matematyce

Dariusz Komosiński, Rafał Kobiela,
Przemysław Kosewski, Mateusz Somysz
MiNI PW, sem. letni 2014/15
Krótki kurs historii matematyki

Problem Collatza

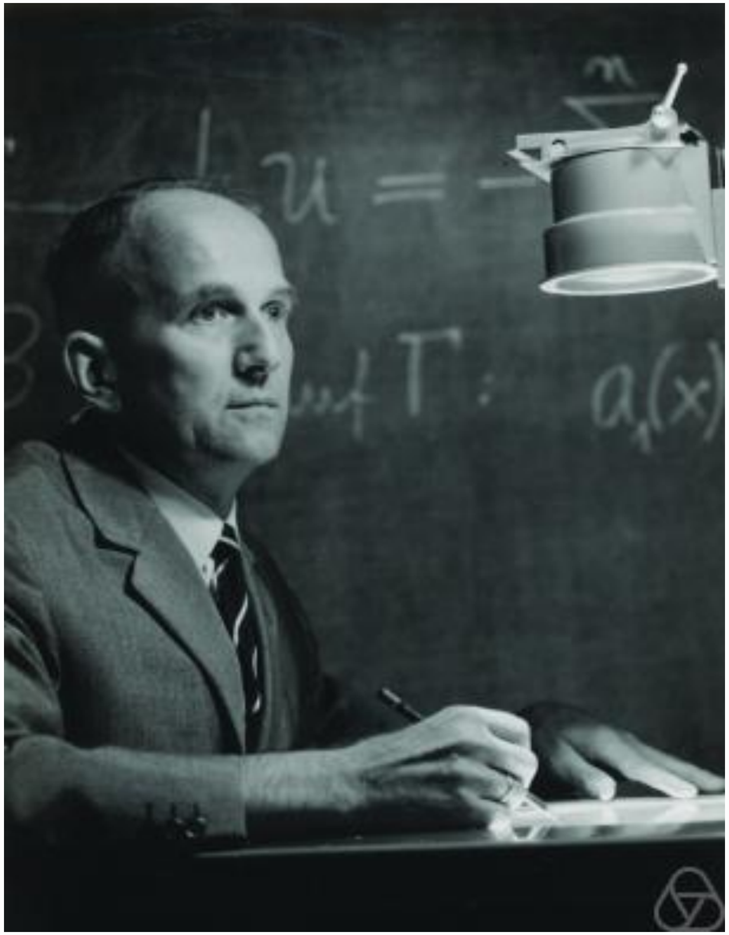
Równania diofantyczne

równanie, którego rozwiązania szuka się w zbiorze liczb całkowitych lub liczb naturalnych.

$$x^n + y^n = z^n$$

$$2^x + 1 = y^2$$

Lothar Collatz



- (ur. 6 lipca 1910 w Arnsberg (Westfalia) – zm. 26 września 1990 w Warnie)
- *Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen*

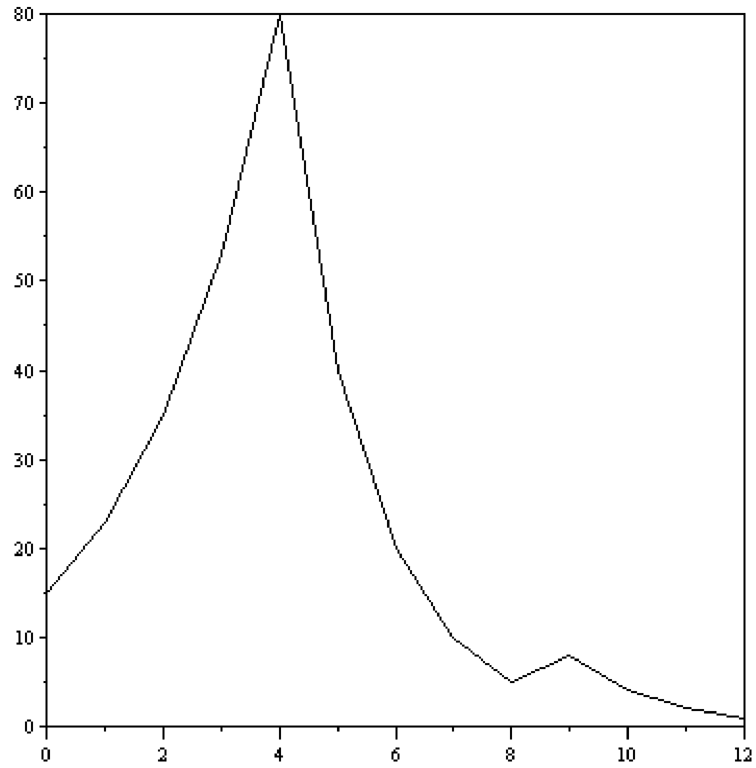
$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n & \text{gdy } c_n \text{ jest parzysta} \\ 3c_n + 1 & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n - \frac{1}{4}(5c_n + 2)((-1)^{c_n} - 1)$$

Przykład c_0=15

- 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n & \text{gdy } c_n \text{ jest parzysta} \\ 3c_n + 1 & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$



Problem Collatza jako hipoteza

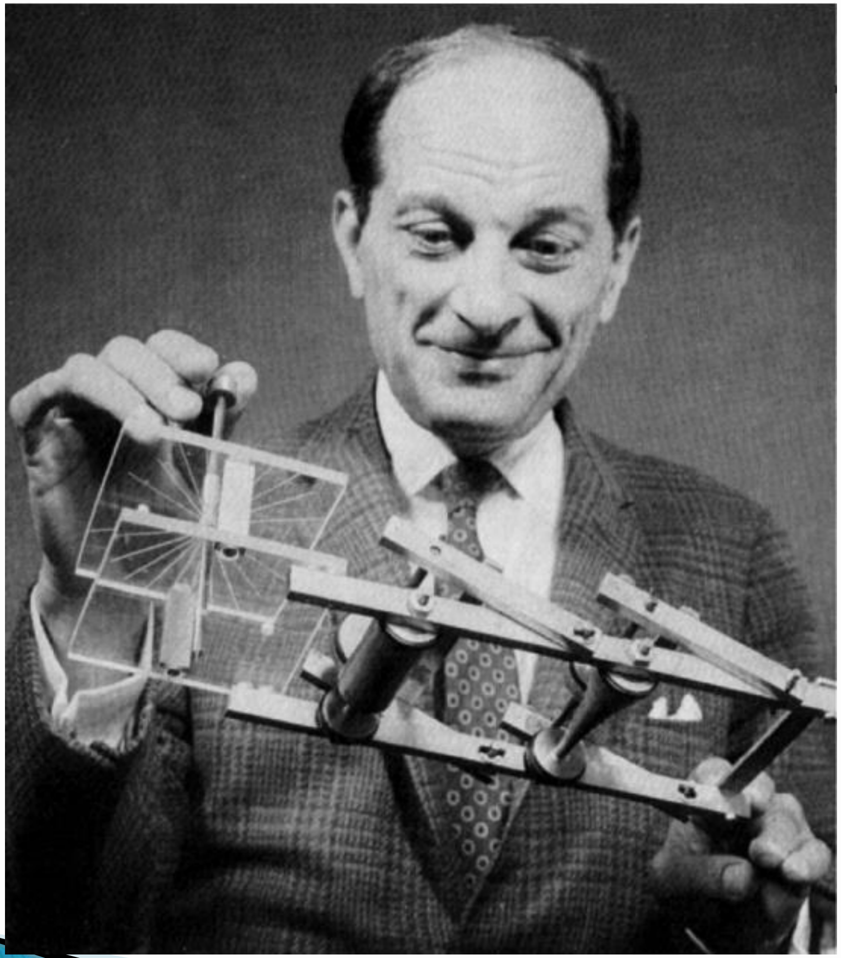
Wykazano prawdziwość hipotezy Collatza dla liczb c_0 mniejszych niż

- $20 \times 2^{58} \approx 5.764 \times 10^{18}$
- Są dwie możliwości zaprzeczenia hipotezie:
- dla jakiejś liczby początkowej otrzymany ciąg wpada w cykl inny niż (..., 4, 2, 1, ...);
- dla jakiejś liczby początkowej otrzymany ciąg jest rozbieżny do nieskończoności.

Uogólnienie na liczby ujemne

- -1, -2, -1
- -5, -14, -7, -20, -10, -5
- -68, -34, -17, -50, -25, -74, -37, -110, -55, -164, -82, -41, -122, -61, -182, -91, -272, -136, -68.

Kto próbował rozwiązać?



Związek z problemem stopu

```
procedure collatz(x);
begin
  do
    if x mod 2 = 0 then
      x := x / 2
    else
      x := 3 * x + 1
  while x <> 1
end
```

Związek z problemem stopu

- Problem Collatza jest prawdopodobnie niealgorytmiczny, tzn. prawdopodobnie nie istnieje algorytm pozwalający rozstrzygnąć hipotezę - pytanie o własność stopu tego programu pozostaje otwarte.
- Wiele osób zaangażowanych w program BOINC uczestniczyło w projekcie 3x+1@home którego celem było rozwiązanie tego problemu poprzez znalezienie kontrprzykładu. Obecnie na stronie tego zamkniętego projektu można znaleźć listę liczb-kandydatów, użytych w projekcie, dla których długość ciągu przed osiągnięciem pętli {4,2,1} wyniosła 1000 iteracji.

Teoria wszystkiego

Demon Laplace'a

- Umysł, który w danym momencie znałby wszystkie siły natury i położenie wszystkich obiektów z których natura jest zbudowana, gdyby był ponadto wystarczająco potężny aby móc te dane przeanalizować, mógłby jednym wzorem opisać ruch największych ciał niebieskich i najmniejszych atomów. Dla takiego umysłu nic nie byłoby niewiadomym i całą przyszłość i przeszłość miałby przed swymi oczyma.

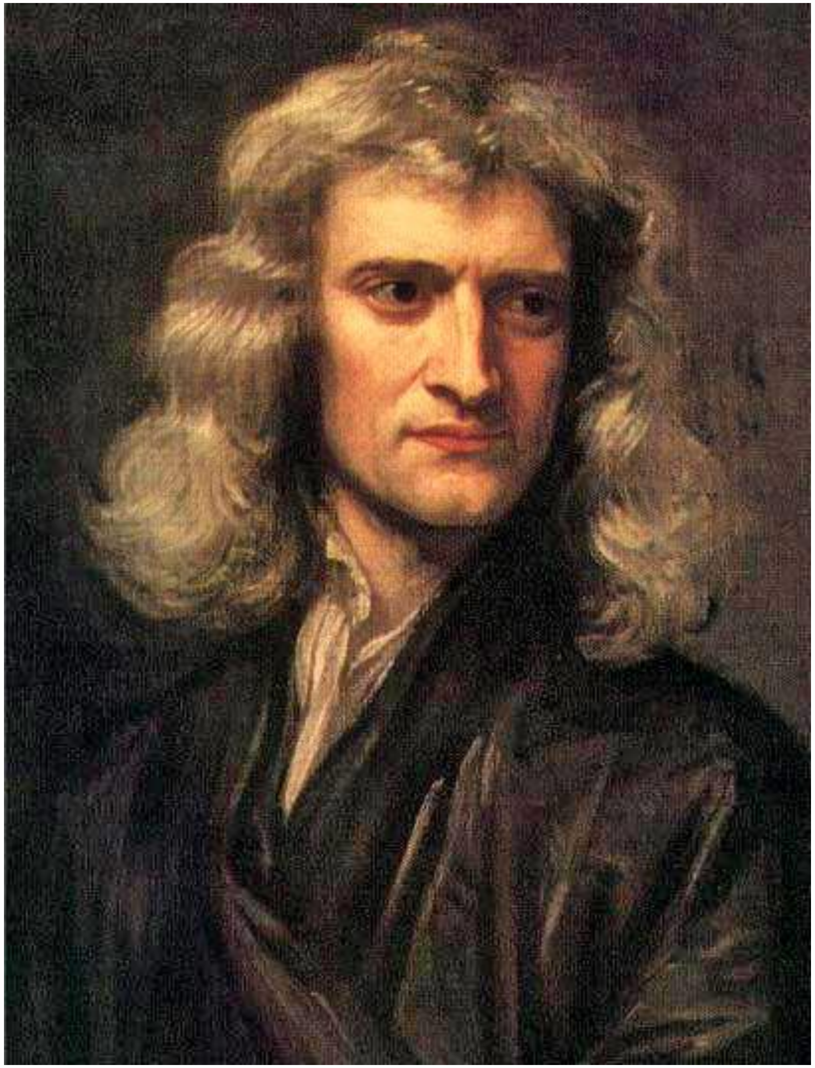
Teoria grawitacji

ujednoliciła pozornie różne oddziaływania:

-przyciąganie ziemskie opisane przez Galileusza,

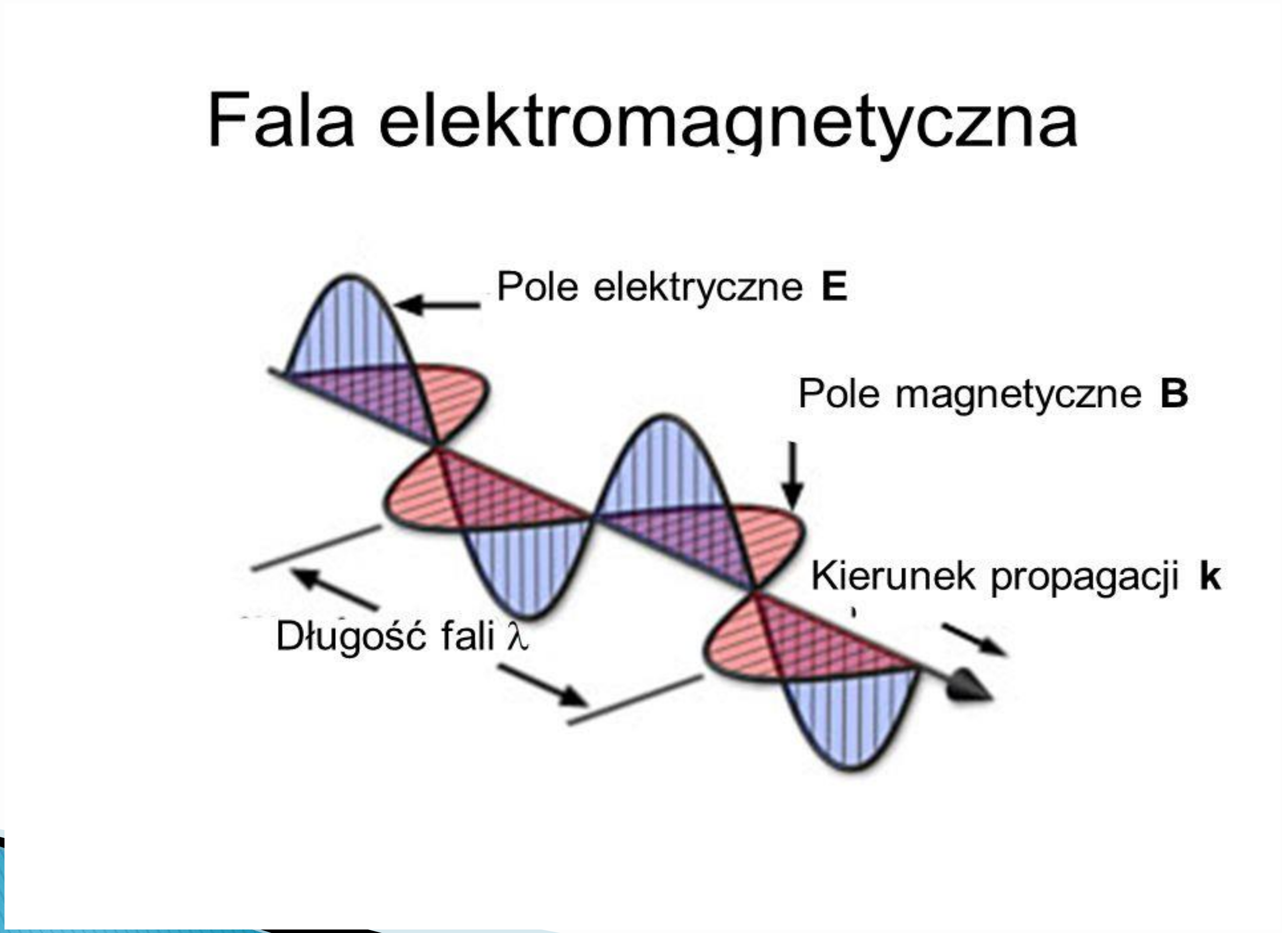
-prawa Keplera ruchu Planet

-zjawiska pływów morskich.

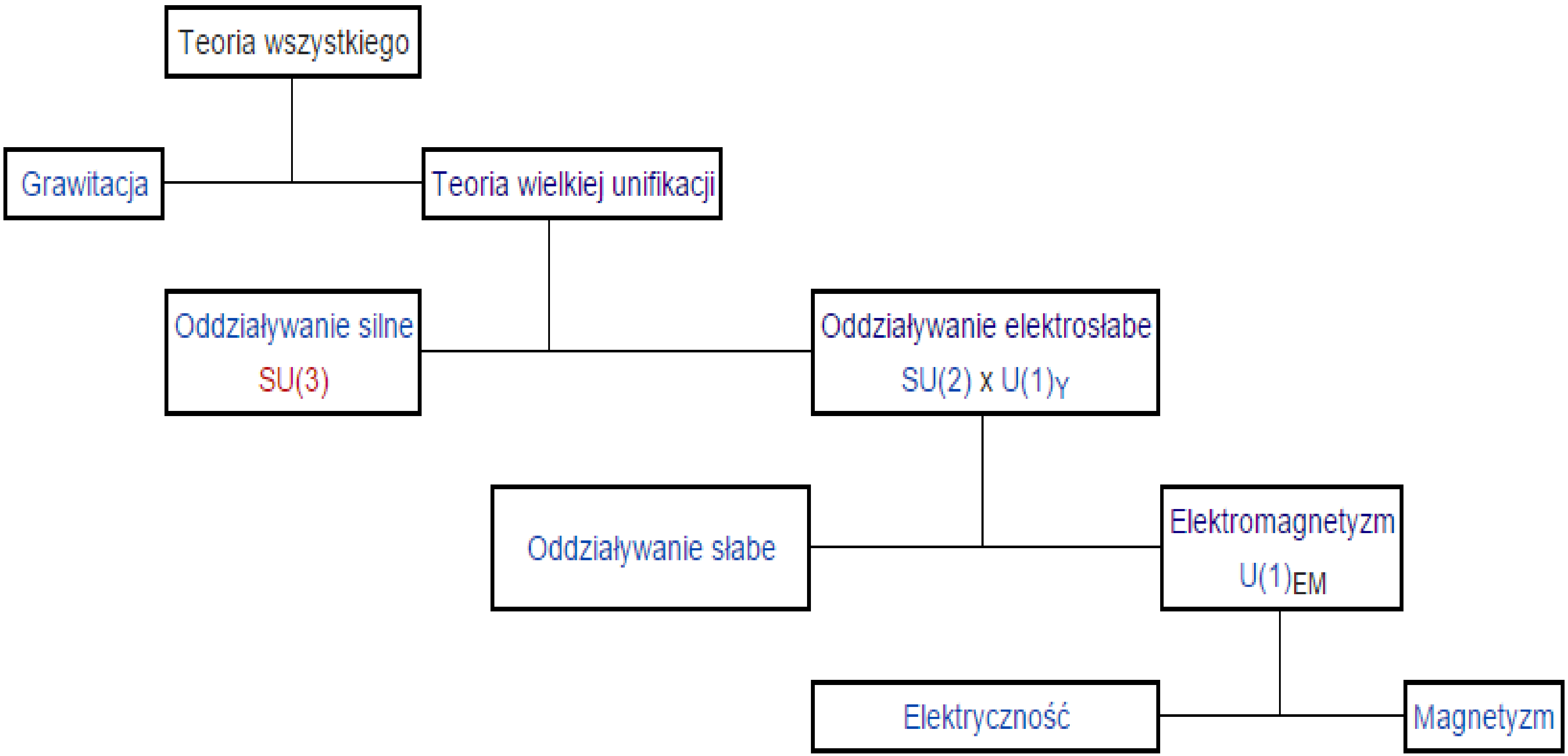


Teoria elektromagnetyzmu

- James Clerk Maxwell

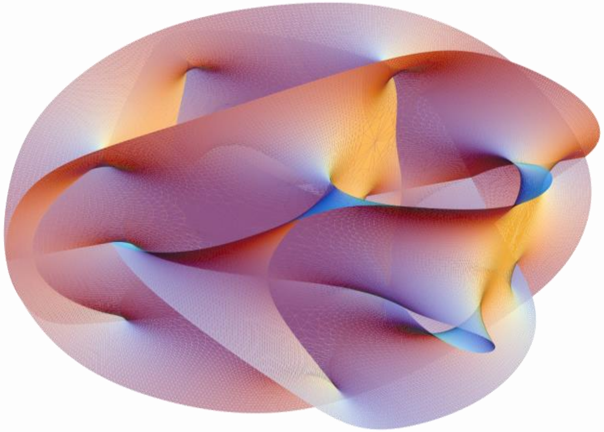


Współczesna fizyka

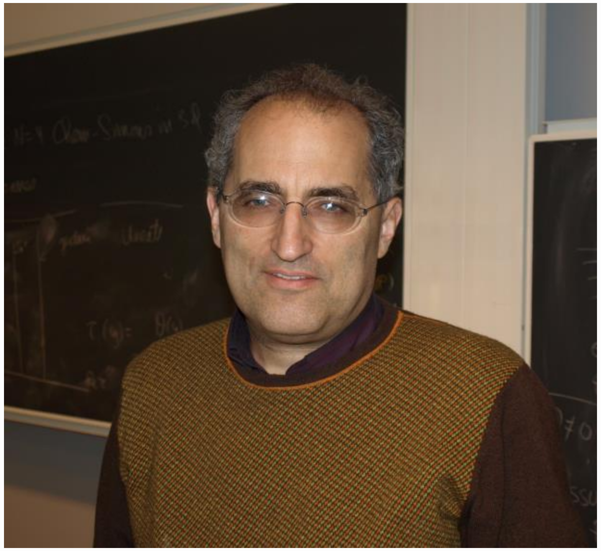


M-teoria

M-teoria przewiduje istnienie superstrun, supercząstek, bran (skrót od "membrana"), w tym supermembran, bran Dirichleta (mających od 0 do 10 wymiarów), czarnych bran, S-bran czy 6-wymiarowych NS5 bran.



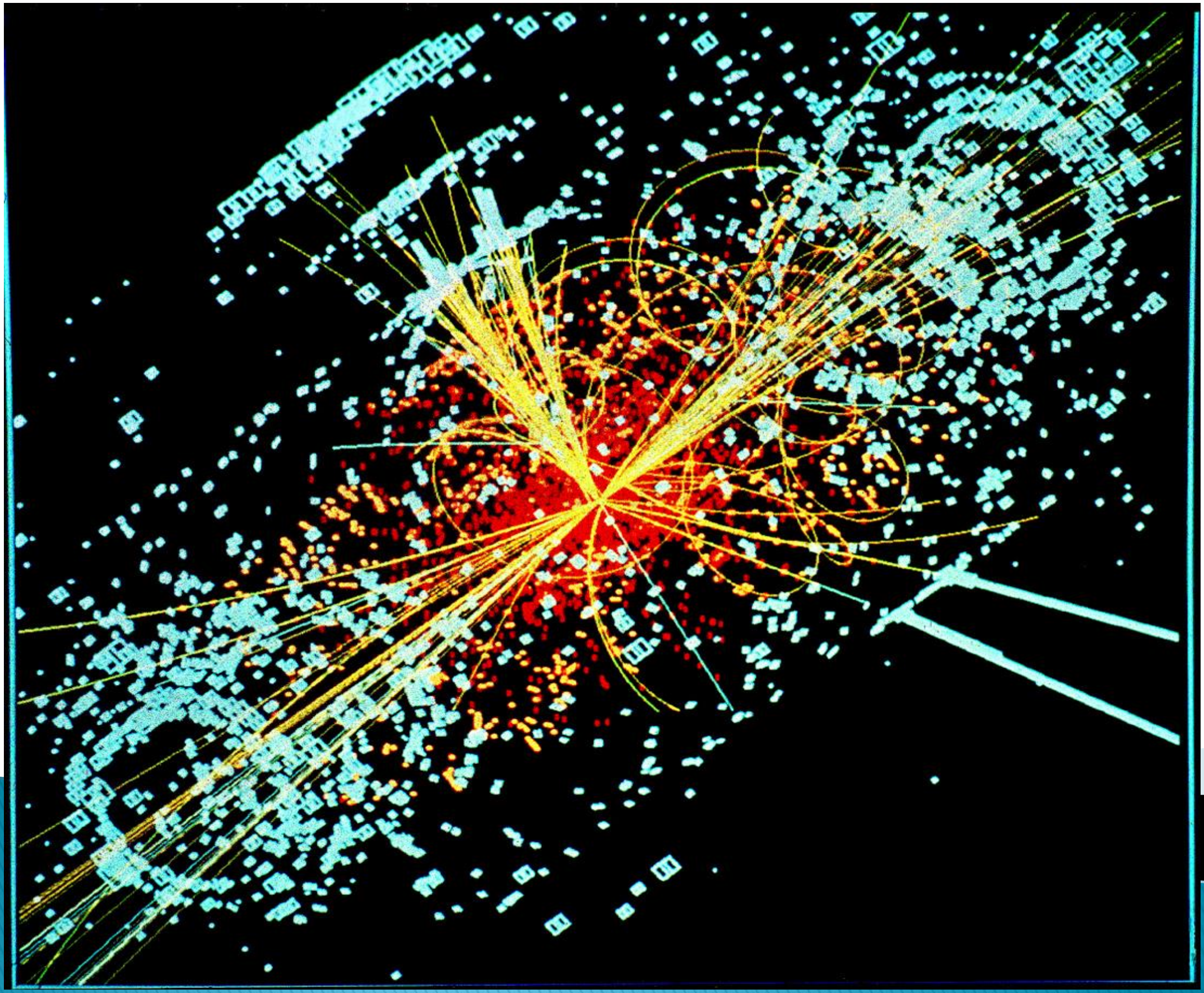
Pierwszy rodzaj M-teorii opisuje 11-wymiarową hiperprzestrzeń. Inne wersje M-teorii przewidują istnienie Wszechświata 4 lub 5 wymiarowego. 12-wymiarowa wersja M-teorii nosi nazwę F-teoria, a 13-wymiarowa - S-teoria.



Twierdzenie Godla

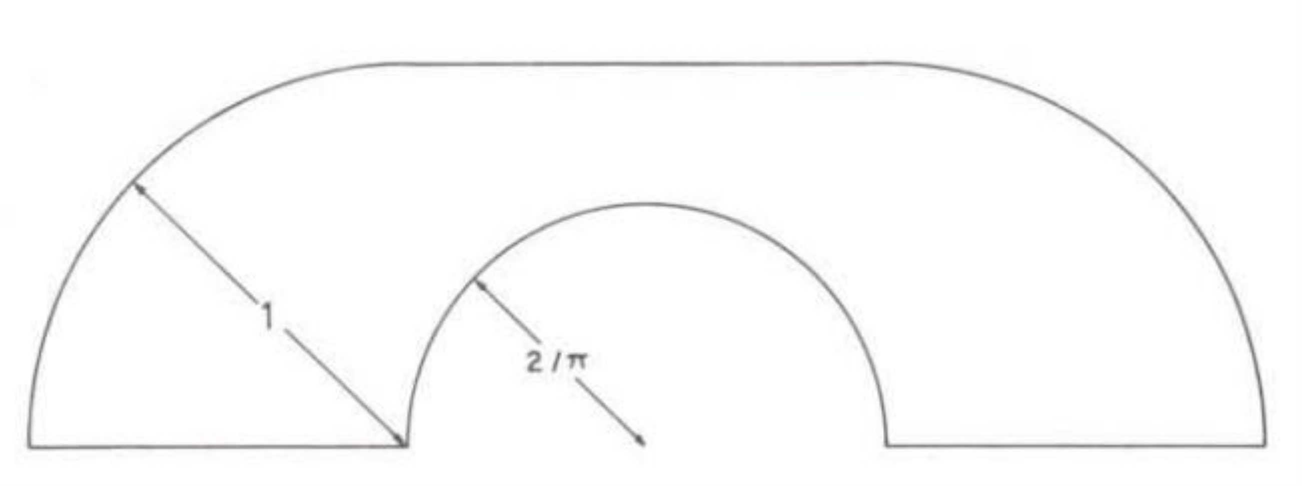
każdy wystarczająco skomplikowany system logiczny jest albo wewnętrznie sprzeczny (można w nim udowodnić jakieś zdanie oraz jego zaprzeczenie), albo jest niekompletny (istnieją w nim trywialnie prawdziwe zdania, których nie da się dowieść)
Zgodnie z tym twierdzeniem TW jest nieosiągalna

Bozzon Higgsa



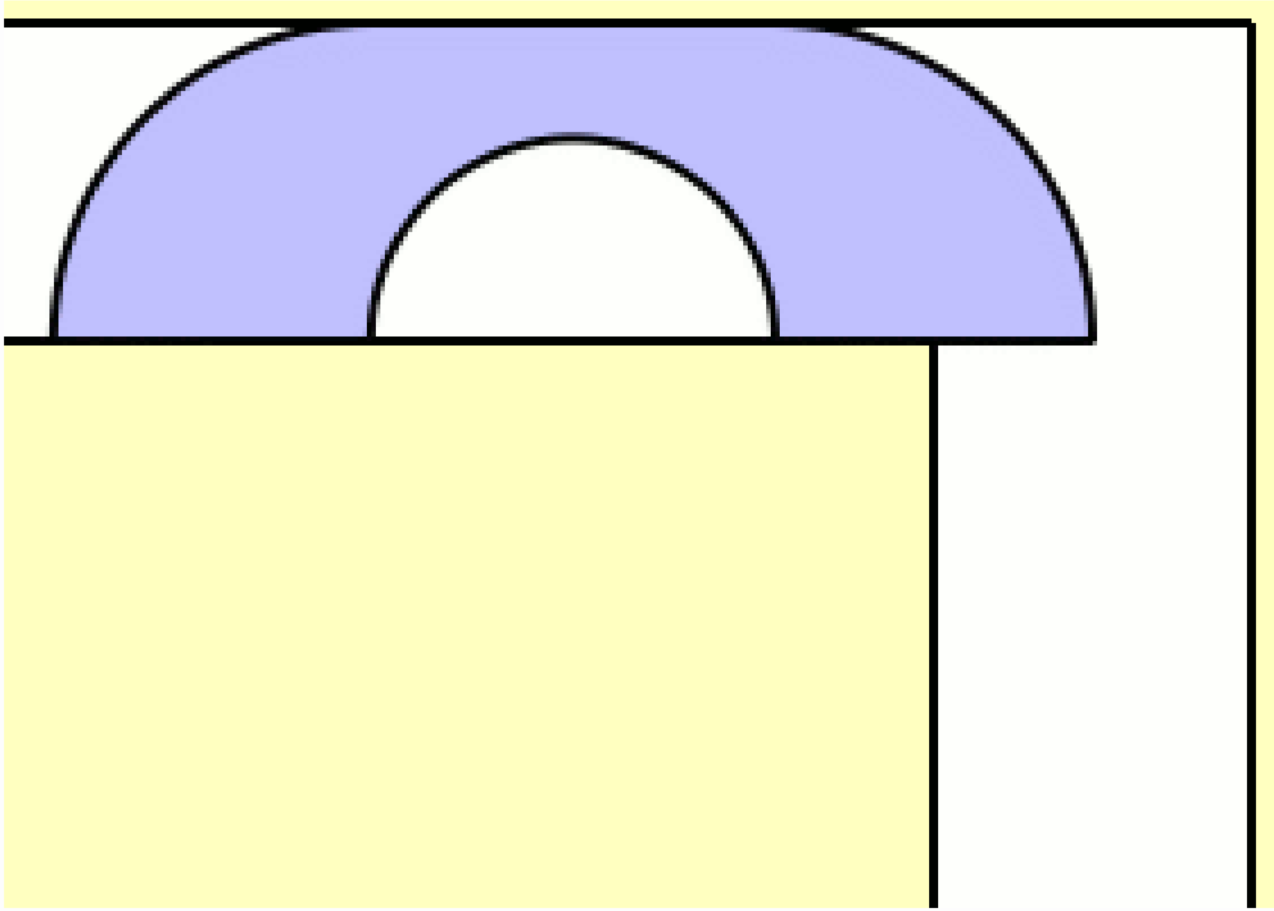
Problem przesunięcia sofy (Leo Moser)

Dolne oszacowanie



$$A \gg \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \approx 2{,}207416099\ John\ Hammersley$$

Dolne oszacowanie



$$A \gg \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \approx 2{,}207416099 \; John\ Hammersley$$

I had always guessed (but never been able to prove) that the lower bound above was also the exact value of the area”

Dolne oszacowanie

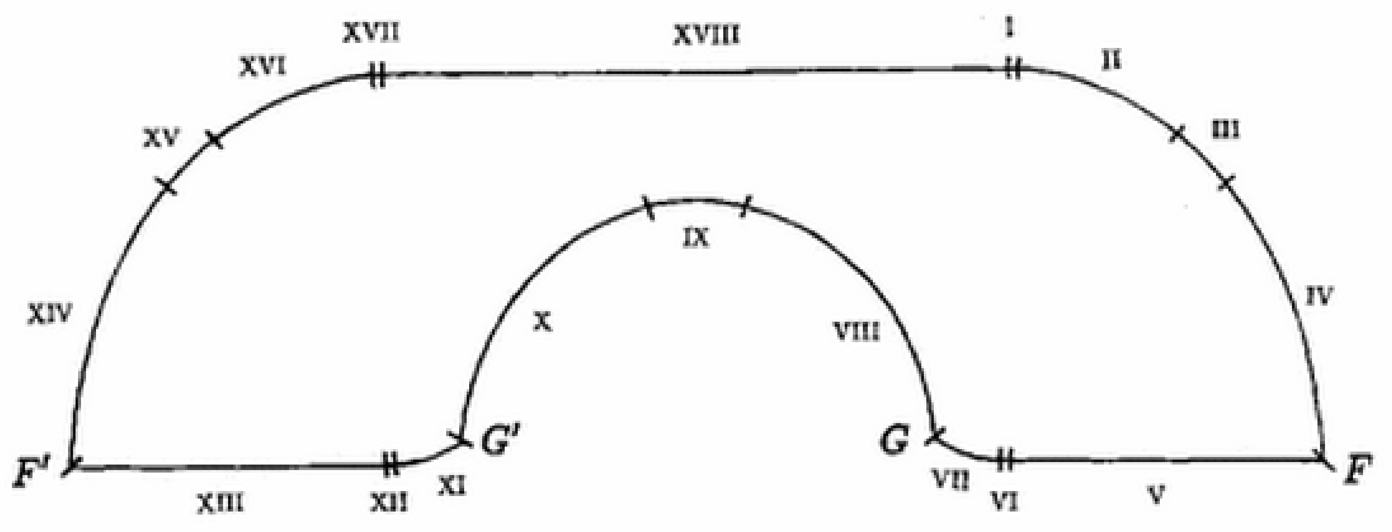


Fig. 2.

A=2.219531668871 Joseph Gerver

Hipoteza Goldbacha

haben, nicht beytragen, es wäre aber schon was sonderliches, wenn die series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe; auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren: dass jede Zahl welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey als man will (die unitatem mit dazu gerechnet) biss auf die congeriem omnium unitatum.* zum Exempel

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \quad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \quad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \quad \&c.$$

Hierauf folgen ein paar observationes so demonstrirt werden können:

Si v. sit functio ipsius x. eiusmodi ut facta $v = c$. numero cuicunque, determinari possit x per c. et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x. in aequatione $v^{2x+1} = (2v+1)(v+1)^{x-1}$ | $\frac{v^{2x+1} - (vv+v)(v+1)^{x-1}}{v^{2x+1} - (2v+1)(v+1)^{x-1}}$ ... dasselbe $vv-v-1$ daiger. $vv-v-1$

Si concipiatur curva cuius abscissa sit x. applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n.2^{2n}}$ posita n. pro exponente terminorum, hoc est, applicata $= \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} + \&c.$ dico, si fuerit abscissa $= 1$. applicatam fore $= \frac{1}{3} = l\frac{4}{3}$: fit hic applicata $= y$ erit $y = l\frac{4}{4-x}$

2 . . . . $l2$.

3 . . . . $2l2$.

4 vel major . . . . infinitam.

Ich verharre mit aller ersinnlichen Hochachtung

Euer Hochedelgebohren ergebenster Diener

Goldbach.

Moscau d. 7. Jun. st. n. 1742.

* Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu $n+1$, si successerit in casu n, et $n+1$ dividi possit in duos numeros primos. Die demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey.

Przykłady

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 3 + 5

10 = 3 + 7 = 5 + 5

12 = 7 + 5

...

100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53

...

$\{52 = 5 + 47,\ 52 = 11 + 41,\ 52 = 23 + 29\}$

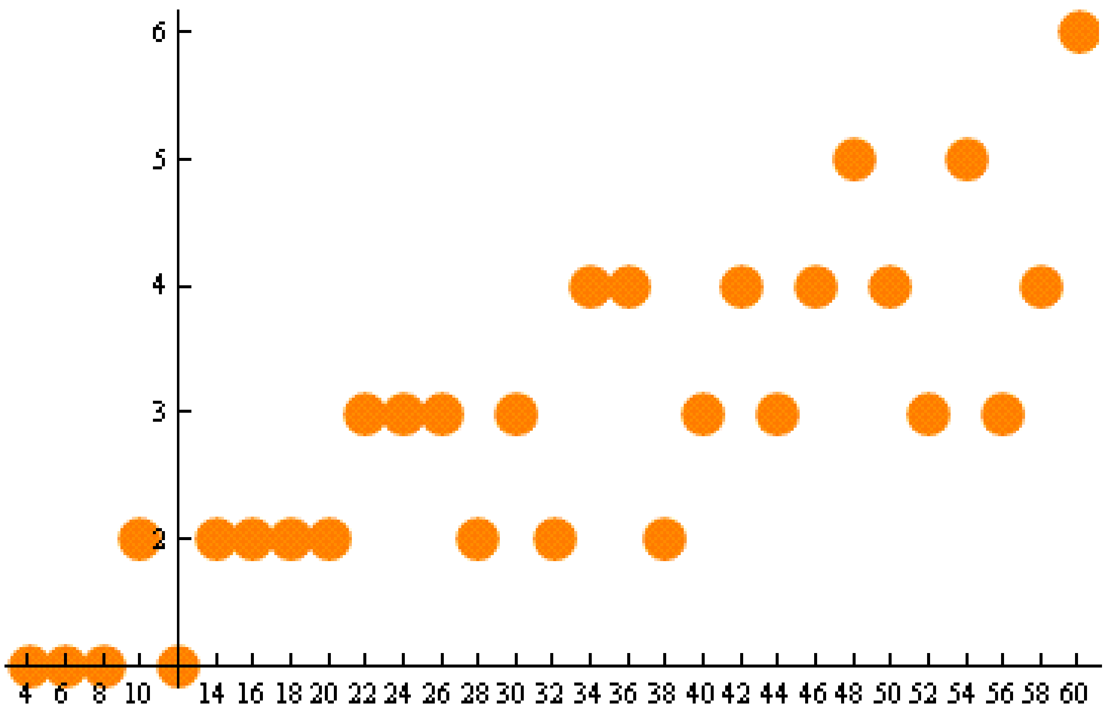
$\{54 = 7 + 47,\ 54 = 11 + 43,\ 54 = 13 + 41,\ 54 = 17 + 37,\ 54 = 23 + 31\}$

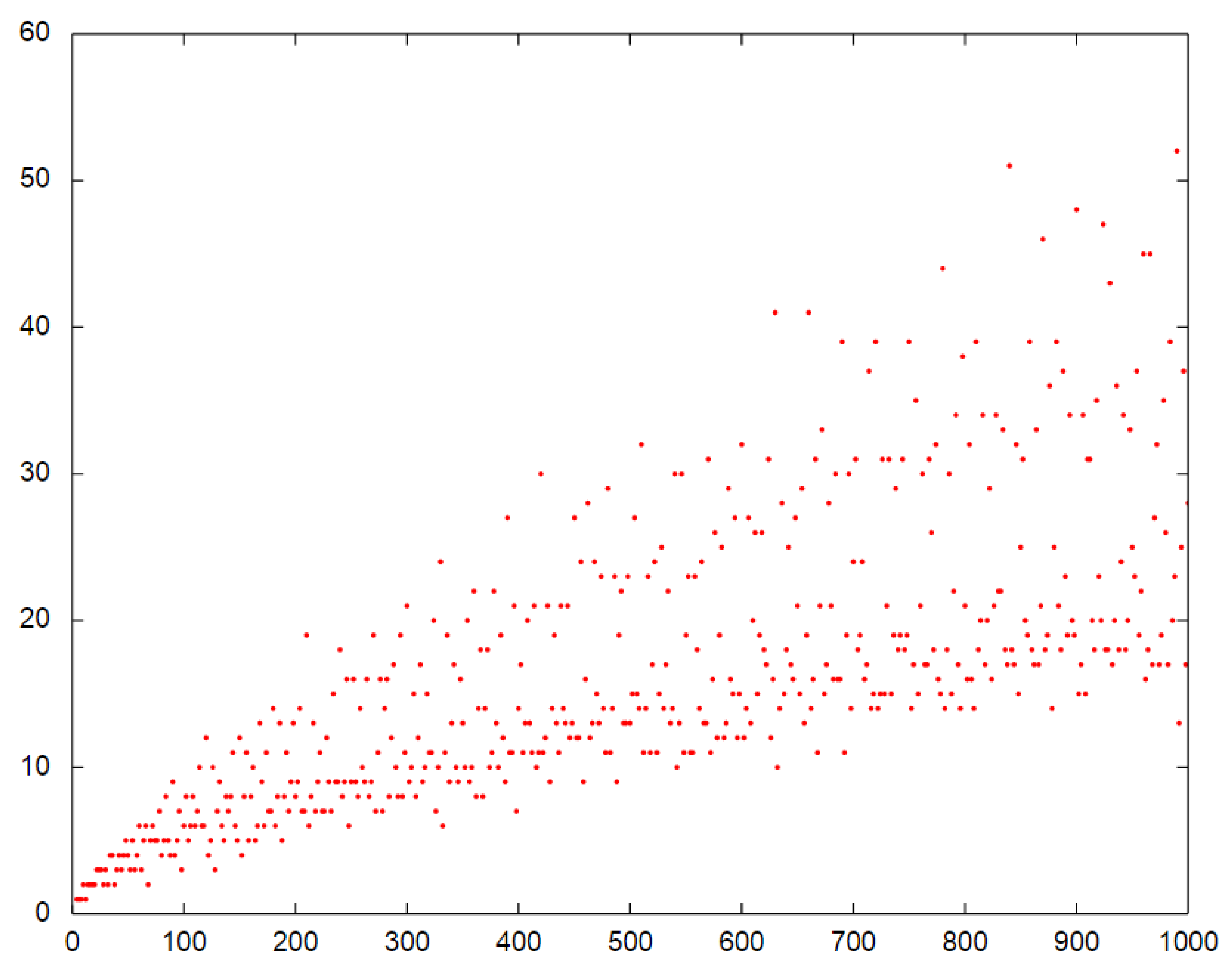
$\{56 = 3 + 53,\ 56 = 13 + 43,\ 56 = 19 + 37\}$

$\{58 = 5 + 53,\ 58 = 11 + 47,\ 58 = 17 + 41,\ 58 = 29 + 29\}$

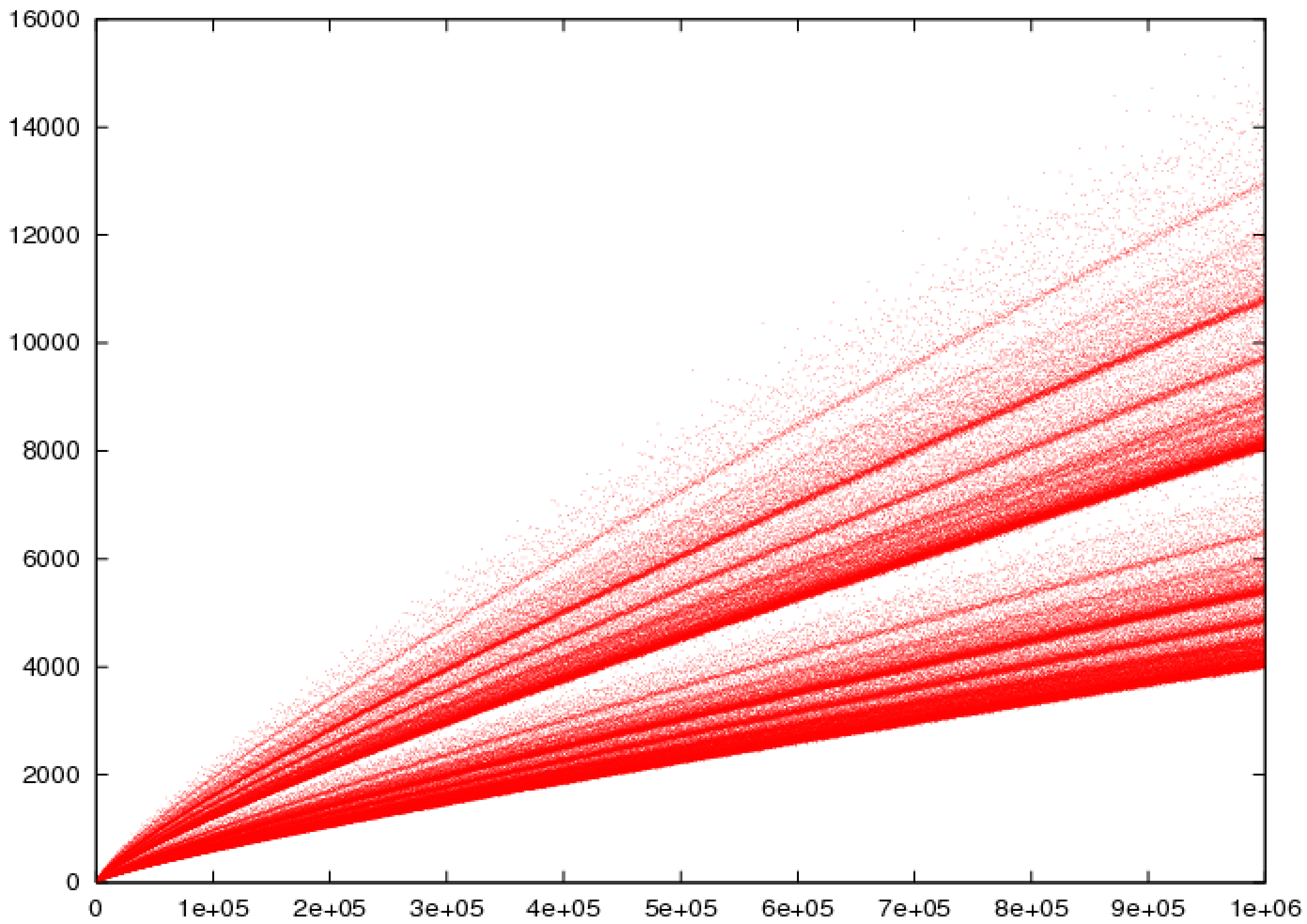
$\{60 = 7 + 53,\ 60 = 13 + 47,\ 60 = 17 + 43,\ 60 = 19 + 41,\ 60 = 23 + 37,$

distribution of the number of representations





60
50
40
30
20
10
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000



16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
1e+05
2e+05
3e+05
4e+05
5e+05
6e+05
7e+05
8e+05
9e+05
1e+06

bound	reference
1×10^4	Desboves 1885
1×10^5	Pipping 1938
1×10^8	Stein and Stein 1965ab
2×10^{10}	Granville et al. 1989
4×10^{11}	Sinisalo 1993
1×10^{14}	Deshouillers et al. 1998
4×10^{14}	Richstein 1999, 2001
2×10^{16}	Oliveira e Silva (Mar. 24, 2003)
6×10^{16}	Oliveira e Silva (Oct. 3, 2003)
2×10^{17}	Oliveira e Silva (Feb. 5, 2005)
3×10^{17}	Oliveira e Silva (Dec. 30, 2005)
12×10^{17}	Oliveira e Silva (Jul. 14, 2008)
4×10^{18}	Oliveira e Silva (Apr. 2012)

Słaba hipoteza Goldbaha

- $11=3+3+5$;
- $159 = 139+13+7$
- $15=3+7+5$
- $13=3+3+7$

Dowody:

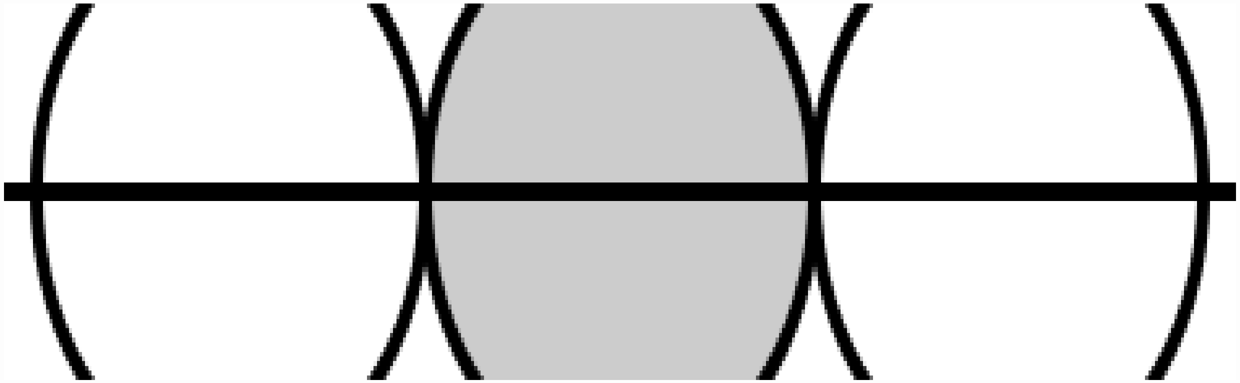
Liu Ming-Chit, 2012 $n > e^{3100} \approx 2 \times 10^{1346}$

Harald Helfgott, 2013 $n \gg 10^{30}$

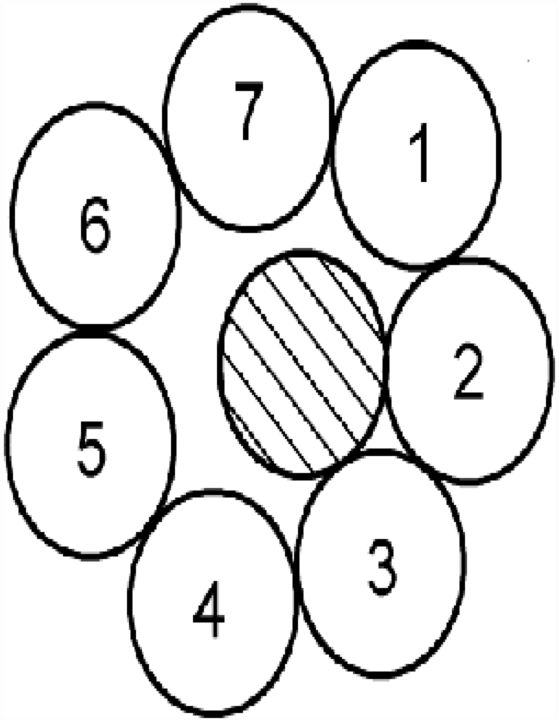

znak
Apostolos Doxiadis
ZABÓJCZA HIPOTEZA

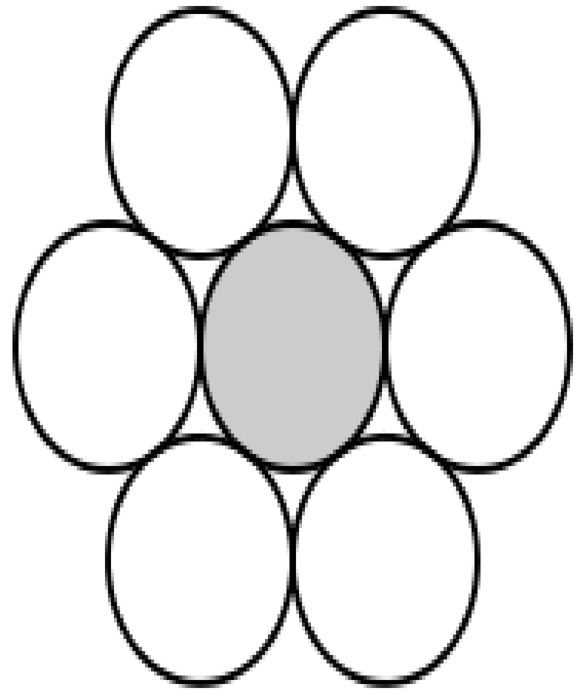
Kissing number problem

Jeden wymiar

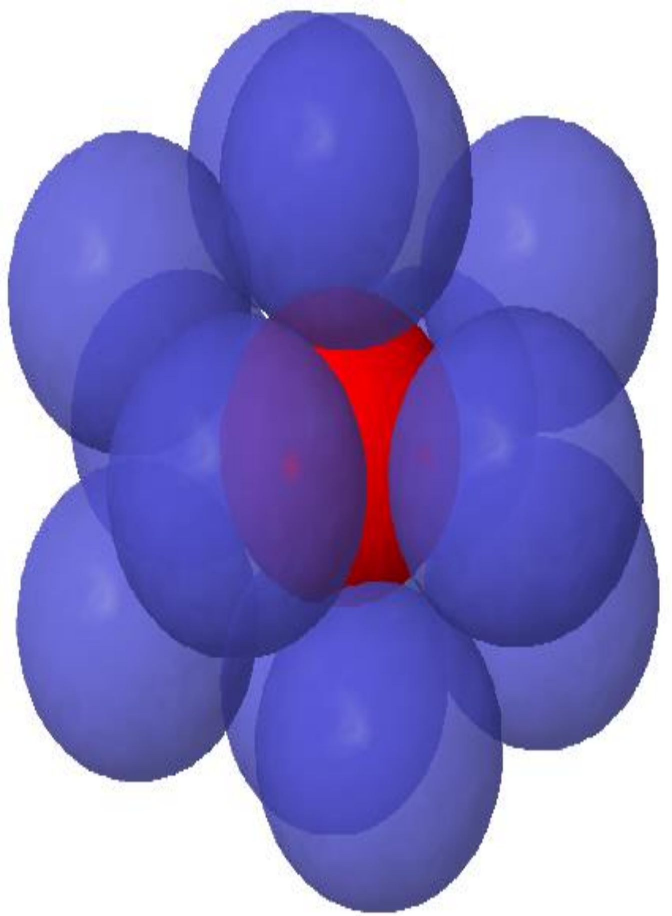


Drugi wymiar





Trzeci wymiar

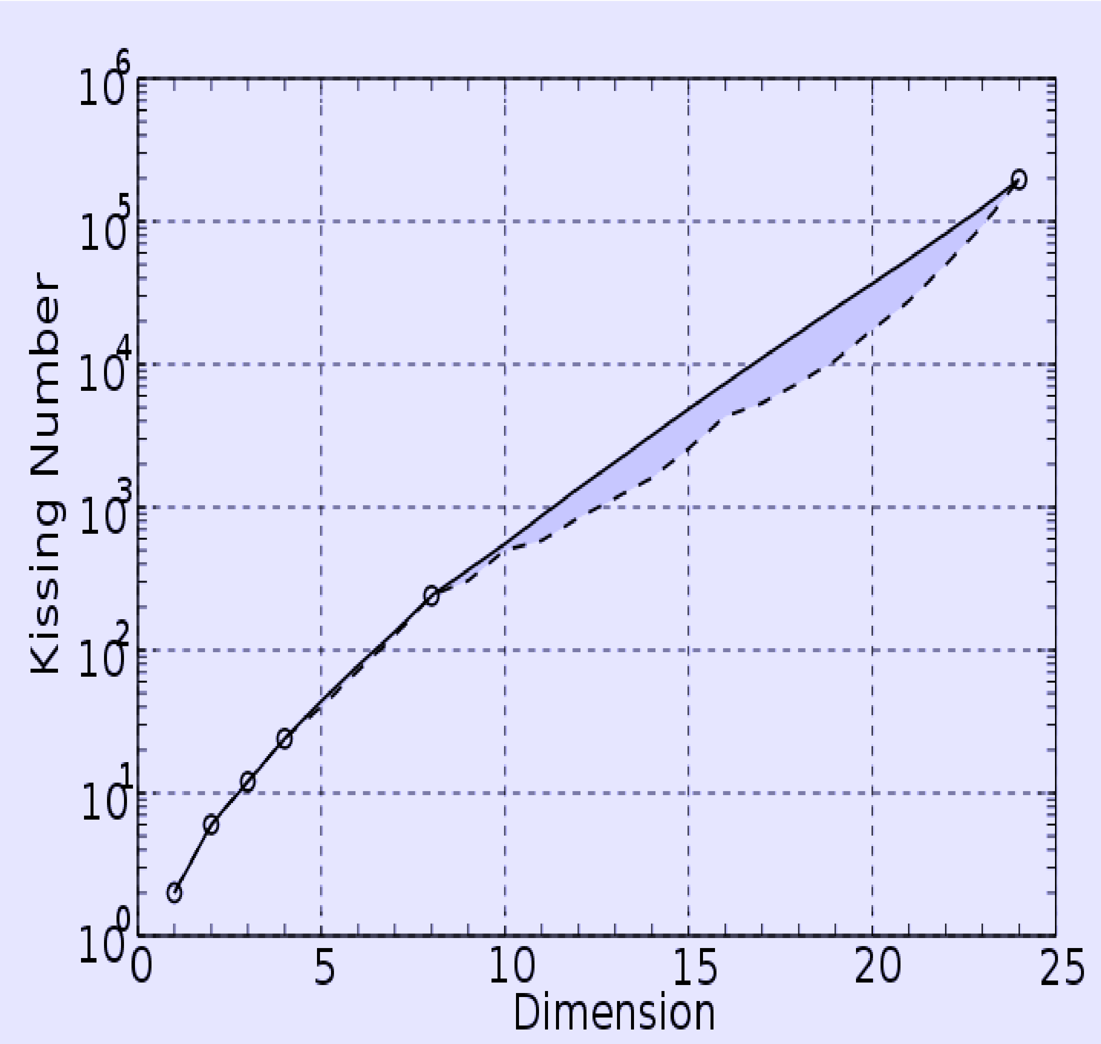


Znane wyniki

Wymiar	Dolne ograniczenie	Górne ograniczenie
1	2	
2	6	
3	12	
4	24	
5	40	44
6	72	78
7	126	134
8	240	
9	306	364
10	500	554
11	582	870
12	840	1,357

Wymiar	Dolne ograniczenie	Górne ograniczenie
13	1,154	2,069
14	1,606	3,183
15	2,564	4,866
16	4,32	7,355
17	5,346	11,072
18	7,398	16,572
19	10,688	24,812
20	17,4	36,764
21	27,72	54,584
22	49,896	82,34
23	93,15	124,416
24	196,56	

Szacowania na wykresie



Problem algorytmu 196

Weźmy dowolną liczbę i zapiszmy ją od tyłu.

Teraz dodajmy do siebie pierwotną liczbę oraz nowo-otrzymaną.

Teraz powtarzajmy tę operację dopóki nie otrzymamy liczby będącej palindromem.

Przykład

Weźmy 5820.

5820 -> 5820+285=6105 -> 6105+5016=11121 -> 11121+12111=23232

23232 jest palindromem -> algorytm zakończony

Stosując ten algorytm do liczb 1, 2, 3... Otrzymamy kolejno:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 11, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 121, ...

Dla liczby 89 otrzymamy szczególnie duża wartość, bo aż 8813200023188

Około 80% liczb poniżej 10 000 wymaga tylko czterech lub mniej operacji aby otrzymać palindrom.

Pierwsze parę liczb, dla których nie znamy palindromów, czasami zwane liczbami Lychrel to:

96, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, ...

Liczby otrzymane po zastosowaniu algorytmu do liczby 196 to kolejno: 196, 887, 1675, 7436, 13783, ...

Nie jest znany palindrom, który by powstał po zastosowaniu tego algorytmu do 196. Dlatego ta specjalna liczba 196 została zapożyczona do nazwania tego algorytmu.

W 1990 roku, John Walker przeprowadził 2 415 836 iteracji i otrzymał liczbę mającą 1 000 000 cyfr.

W 1995 Tim Irvin otrzymał liczbę mającą 2 000 000 cyfr.

W maju 2006 roku stwierdzono, po 724 756 966 iteracjach, że jeśli istnieje palindrom, to musi miec ponad 300 mln cyfr.

Do dziś problem, czy istnieje palindrom dla liczby 196 nie został rozwiązany.

Czy P=NP?

Problem P – problem decyzyjny, dla którego rozwiązanie można znaleźć w czasie wielomianowym.

Przykład: *Czy jakikolwiek podzbiór zadanego zbioru {-2,6,-3,72,10,-11} sumuje się do zera?*

Trudno znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia w czasie wielomianowym, jednak łatwo sprawdzić, że np. {-2,6,-3,10,-11} jest rozwiązaniem.

Nie jest znany algorytm na znalezienie takiego podzbioru w czasie wielomianowym (znamy tylko algorytm o złożoności wykładniczej), ale taki algorytm istnieje jeśli P=NP.

Problem NP – problem, dla którego sprawdzenie rozwiązania danego z zewnątrz ma czas wielomianowy.

Każdy problem P jest NP, ale nie wiadomo czy istnieje problem NP nie będący problemem P.

Odpowiedź na pytanie czy P=NP sprawiłaby, że byłoby jasne, że są problemy, których rozwiązania mogą być zweryfikowane w czasie wielomianowym, ale nie mogą być rozwiązane w czasie wielomianowym (jesli $P \neq NP$)

Jest to jeden z problemow milenijnych, wybranych przez Instytut Matematyczny Claya, za którego rozwiązanie można otrzymać 1 mln dolarów.